製品試作の迅速・容易化技術に関する研究

新ラピッドプロトタイピング法の開発(第5報)

近藤幸治

Development of A New Rapid Prototyping method(report5) Koji Kondo

This paper describes how to get some edge & vertex data of a polyhedron .1st,some simple 3d_measuring data can be changed to a diagram such as plane or sphere or line or circle by Newton's Least-Squares method. 2nd,some planes are jointed to a polyhedron. and it's some edge & vertex data are calculated by original method.

1 はじめに

わが国の機械製造業の3次元化は引き続き進展している。機械設計に3次元CADが普及していることは言うまでもない。加工分野でも光造形に代表されるように3次元データからの直接加工するラピッドプロトタイピング方式が急激に普及しつつある。計測分野でも3次元計測機の普及とともに機器コストも削減され、以前より身近なものとなってきている。

しかし、3次元の計測に関しては、データ処理に問題が残っている。というのは、3次元計測データは2次元と比べて膨大な量のものとなるため、そのままではCADでの利用が難しく、データを抽象化する技術が必要となる。具体的には、立体のエッジや頂点の位置と方向、球の中心と半径の抽出等を行うことにより、計測立体をCAD化することができれば計測からのリバースエンジニアリングが可能となる。

本研究は製品試作の迅速・容易化を目指すものであるが、 今回は3次元計測データの抽象化に取り組み、簡単な図形 の抽象化に成功したのでここに報告する。

まず、前半で単純図形を最小二乗法で近似する法について述べ、後半で計測した点群データからの自動面張りと多面体抽出法について述べる。そのなかで、面のつながりを表現する方法として、独自の表現法を提案した。

2 計測データの図形近似

2-1 空間上の平面の表現法

図1において、平面をS、その法線単位ベクトルを*U*、 法線とSとの交点をC、原点とC点の距離をLとする。 式をLで割ると, *Q・U*=L... さらにLで割ると、 *Q・V*=1... ; *V=U*/L... '

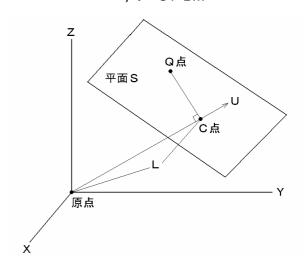


図1 平面の表現法

つまり、任意の平面はベクトル Vのみで表現される。 以降、Vを固有ベクトルとする。

機械・金属部

2 - 2 平面の抽出法(3自由度)

空間上にPという点群があり、任意の要素をPiとする。 この点群に最も近い平面を平面Sとし、これを求めること を考える。図2参照。

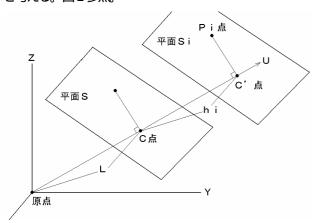


図2 平面の抽出法

点Piを通り平面Siに平行な平面esiとする。平行なので、法線ベクトルUは同一である。平面siと原点との距離esiと中面siとの距離をhiとすると、

式より、 *Pi・U* = Li

=L+hi

よって、 hi=*Pi・U*-L =(*Pi・V*-1)*L...

最小二乗法により、 $K = \{(hi)^2\}$ が極小であるとすると、Kを固有ベクトル Vの各要素V j で偏微分した値は0 である。

よって、 $\{2*hi*Pij*L\}=0$; ただし、PijはベクトルPioj 成分である。

L は積算の外に出せるので、 2 L* {hi*Pij} = 0 L が 0 で ない 時、 {hi*Pij} = 0

より、 $\{(Pi \cdot V - 1) * L*Pij\} = 0$

よって、 {(*Pi・V*)*Pij} = { Pij}...

3次元空間の場合、 j = 1, 2、3とおくと、

({Pi1*Pi1} {Pi2*Pi1} {Pi3*Pi1}). V= {Pi1}

({Pi1*Pi2} {Pi2*Pi2} {Pi3*Pi2}).

V= {Pi2}

({Pi1*Pi3} {Pi2*Pi3} {Pi3*Pi3})• **V**= {Pi3}...

以上の式は行列で表せるので、ガウスの消去法により固 有ベクトル Vが求まり、式より、平面 S が求まる。

ただし、以下の場合は解が求まらない。

(例外0)P点の数が最低3点ないと平面は決まらない。 (例外1)P点が真の直線上に乗る場合、直線を含む平面 が無数に存在する。

(例外2)P 点が原点を通る真の平面上に乗る場合、L=0 なので Vが無限大になる。ただし Uによる 式表現は可能。

2-3 平面群の焦点抽出法

n次元の空間上に解平面群があり、この平面群との距離の二乗の和が最も近い点を焦点Pとし、これを求めることを考える。

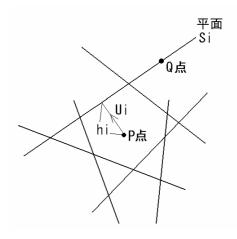


図3 焦点抽出法

任意の平面をS i とし、その法線単位ベクトルをU i する。 平面S i 上の任意の点をQ とし、点P と平面S i との距離 をh i とすると、

式より、 (*Q-P*)・*Ui*=hi... ...(点Pを原点とする座標系で 式に代入)

最小二乗法により、 $K = \{(hi)^2\}$ が極小であるとすると、KをPの各要素P j で偏微分した値は0 である。よって、 $\{2*hi*(-Uij)\}=0$; Uij はベクトルUiの j 成分である。

よって、 $\{(\textbf{\textit{Q}} - \textbf{\textit{P}}) \cdot \textbf{\textit{U}} i^* \cup ij\} = 0$ よって、 $\{\textbf{\textit{Q}} \cdot \textbf{\textit{U}} i^* \cup ij\} = \{\textbf{\textit{P}} \cdot \textbf{\textit{U}} i^* \cup ij\}$ より、原点と平面S i との距離L i とすると、 $\textbf{\textit{Q}} \cdot \textbf{\textit{U}} i = L$ i であるので、

 $\{Li^*Uij\} = \{P \cdot Ui^*Uij\}...$

3次元空間の場合、 j = 1 , 2、3とおくと、

($\{\text{Ui1*Ui1}\}\ \{\text{Ui2*Ui1}\}\ \{\text{Ui3*Ui1}\}\}$)• $P = \{\text{Li*Ui1}\}$

($\{\text{Ui1*Ui2}\}\ \{\text{Ui2*Ui2}\}\ \{\text{Ui3*Ui2}\}\}$)• $P = \{\text{Li*Ui2}\}$

 $(\{Ui1*Ui3\} \{Ui2*Ui3\} \{Ui3*Ui3\}) \cdot P = \{Li*Ui3\}...$

以上の式は行列で表せるので、ガウスの消去法によりベクトル*P*つまり、焦点の座標が求まる。

2-4 球面抽出法(簡易)

まず、点群の任意の2点が面対象となる平面Siを求める。平面Siは球面中心近くを通るはずなので、「平面群の焦点抽出法」を使って球面の中心を求める。

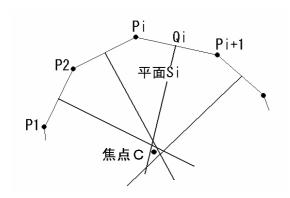


図4 球面抽出法

点群のi番目の点をPiとし、PiとPi+1の中点をQiとする。

点Pi からPi+1 へのベクトルをWi とする。平面Si上の任意の点をXとすると次式が成り立つ。

(X - Qi)・Wi = 0 よって、 $X \cdot Wi = Qi \cdot Wi$ 両辺をWiの長さで割ると、 $X \cdot Ui = Qi \cdot Ui$... ただし、UiはWiに平行で長さ = 1

式は 式の平面の式に相当する。

「平面群の焦点抽出法」の 式に $Li = Qi \cdot Ui$ として代入すると、ただし C は焦点。

以上の式は行列で表せるので、ガウスの消去法によりベクトル*C*つまり、焦点の座標が求まる。

次に、適切な半径を最小二乗法で求める。

最適な半径をr、Riを球の中心CとPi点の距離とすると、K = {(Ri-r)^2}

Kをrで偏微分した値は0になるので、

2* {(Ri-r)*-1}=0 よって、 {Ri-r}=0

つまり、r=Riの平均...

2 - 5 球面のニュートン・ラプソン法による高精度化中心点 P、点群を Qi とし、Qi から点 P へのベクトルを Vi、R i = |Vi| とする。

最小二乗法の定理から、K = {(Ri-r)^2}; ただしrは球の半径。

K/ r = 2 · {(Ri-r)·-1}···=0の時 rはRiの平均となる。...

 $E(1)= K/ Px = 2 \cdot \{(Ri-r) \cdot (Ri-r)/ Px\}$

 $E(2)= K/ Py=2 \cdot \{(Ri-r) \cdot (Ri-r)/ Py\}$

 $E(3)= K/ Pz=2 \cdot \{(Ri-r) \cdot (Ri-r)/ Pz\}$

...

Eは点Pが最適であればOとなるはずなので、Eを近似誤差とみなす。

Eも点 Px、Py、Pz の多変数関数 (非線形) であるので、 次式が成り立つ。

E=[J]・**P**・・・[J]はヤコビ行列...

Jab = Ea/ Pb ...

、式より、

Jab=2 • {(Ri-r) • (Ri-r) / Pa} / Pb

= 2・ { (Ri-r)/ Pb・ (Ri-r)/ Pa +(Ri-r)・ [(Ri-r)/ Pa]/ Pb}... から[J]は求まる。

E = -Eとして 式から Pを求めれば、P + Pが 線形近似解となる。

Eがゼロに近づくまで繰り返し行えばよい。

実際のシミュレーションでは変数の型に倍精度浮動小数点を用い、 *E*が改善されなくなるまで繰り返すことで、計算限界まで精度向上を図った。

次に、 Ri/ Paの展開について以下に示す。 Ri= |Vi| = ($\emph{Vi} \cdot \emph{Vi}$)・・・内積の平方根... Ri/ Pa = (1/2)・(1/|Vi|)・2・ $\emph{Vi} \cdot$ (\emph{Vi} / Pa)

= (1/Ri)• *Vi•*(*Vi*/ Pa)

 $Vi = P - Qi \pm i$, (Vi/Px) = (1, 0, 0)

(Vi/Py) = (0, 1, 0)

(Vi/Pz) = (0, 0, 1)

よって、 Ri/ Pa = (1/Ri)·(Pa - Qia) ... したがって、 式の2重偏微分項は、以下のとおりとなる。 1) a=/=b の時、

(Ri/ Pa)/ Pb = (Pa - Qia)·(-1/Ri 2)· Ri/ Pb

= (Pa - Qia) · (-1/Ri^2) · (1/Ri) · (Pb - Qib)

= (Pa - Qia) • (Pb - Qib) / Ri^3 ...

2)a==bの時、

 $(Ri/Pa)/Pa = (1/Ri) (Pa - Qia)^2$ 2/Ri^3...

よって、 式は 式から求めることができる。 また、r はR i の平均値であるので、同様に求めることが できる。

2-6 直線抽出法(法)

点群をXY平面に投影する。

Z軸を中心に だけ座標を回転し、新たにX´Y´Z´座標系を設け、 X´Y´平面でY方向の分散が最小となる を最小二乗法で求める。

点群の座標をXYZ系で*Qi* = (Qix,Qiy,Qiz)とすると、

= atan[2* (Xi*Yi)/ (Yi*Yi-Xi*Xi)] / 2;Xi=Qix - (Qx の平均),Yi=Qiy - (Qy の平均)

Y ´軸を中心に だけ座標を回転し、新たに X " Y " Z " 座標系を設け、 X " Y " 平面で X 方向の分散が最小となる を最小二乗法で求める。

点群の座標をX´Y´Z´系で *qi* = (qix,qiy,qiz)とすると、 = atan[2* (Xi*Zi)/ (Zi*Zi-Xi*Xi)] / 2;Xi=qix -(qx の平均),Zi=qiz - (qz の平均)

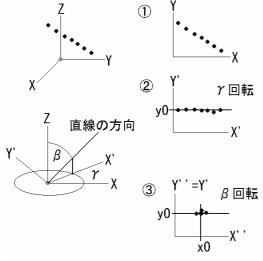


図5 直線の抽出法

通過点を PO=(XO,YO,ZO)、直線の方向ベクトルを U=(Ux,Uy,Uz)、[T] を静止座標系から動座標系への回転 行列とすると、次式が成り立つ。

 \cdot (X0,Y0,Z0) =(x0,y0,0) [T] (Ux,Uy,Uz) =(0,0,1)[T]

より、求まった直線の式は以下のとおり。 (X-X0)/Ux=(Y-Y0)/Uy=(Z-Z0)/Uz

2-7 円弧抽出法(法)

点群から基準平面Sを抽出する。

平面Sの固有ベクトルを Vとすると、平面Sの法線ベクトル Ult Vから求まる。

*U*を回転後の Z ´ 軸の基本ベクトルとすると、 *U* = (T(3,1),T(3,2),T(3,3))。

また、 $T(3,1) = \sin$ 、 $T(3,2) = \cos$ ·sin 、 $T(3,3) = \cos$ ·cos

から と が求まる。

平面Sに点群を投影して円の中心点と半径を求める。 で求まった円の中心と半径を静止座標系に戻す。

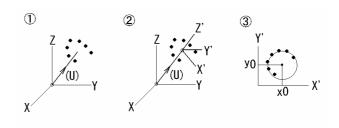


図6 円弧の抽出法

(結果)直線状の空間図形では、解が求まらない場合がある。

2 - 8 空間平面上のN次曲線抽出法(N = 2で説明)

まず、点群から基準平面Sを抽出する。

平面Sの固有ベクトルを Vとすると、平面Sの法線ベクトル Uは Vから求まる。

*U*を回転後の Z ´ 軸の基本ベクトルとすると、 *U* = (T(3,1),T(3,2),T(3,3))。

また、 $T(3,1) = \sin$ 、 $T(3,2) = \cos$ · sin 、 $T(3,3) = \cos$ · cos

から と が求まる。

平面 S に点群を投影して X Y 座標を求める。 $f = a \cdot x \wedge 2 + b \cdot x + c$ として、

誤差hi=yi-f(xi) ただし、I 番目の点の X 座標をxi、Y 座標をyi とする。

K = hi ^2 とし、係数a,b,cに対する偏微分を取

ると0となるはずである。

よって、 ${hi \cdot x \wedge 2} = 0$

よって、 $\{yi \cdot x \wedge 2\} = \{f(xi) \cdot x \wedge 2\}...$ ア

同様に、 {yi・x} = {f(xi)・x}...イ

同様に、 {yi} = {f(xi)}...ウ

アイウの3式にf = a·x ^2 + b·x + cを代入すると、

$$\{x^4\}\cdot a + \{x^3\}\cdot b + \{x^2\}\cdot c = \{yi \cdot x^2\}$$

$$\{x^3\}\cdot a + \{x^2\}\cdot b + \{x\}\cdot c = \{yi \cdot x\}$$

$$\{x^2\}\cdot a + \{x\}\cdot b + \{1\}\cdot c = \{yi\}$$

上記3式は行列で表されるので、係数abcが求まる。 (結果)・円弧データでもN=10次でほぼ近似できる。 曲線が折り返し等で重なると、その部分が不正確になる。

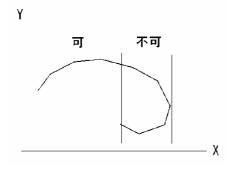


図7 N次曲線の抽出法

3 自動面張り

3次元計測によるランダムな点群データから三角メッシュを自動的に張るルーチンを開発した。以下、その詳細について述べる。

3-1 手順

- ・まず、スタート点 (図8のA点)を選ぶ。
- ・スタート点に最も近い点Bを選び、辺ABを作る。
- ・辺ABに最も近い点Cを選び、三角形ABCを作る。
- ・三角形の辺ABに最短の点Dを探査する。

(探査条件)

ア)点Dは辺ABから見て点Cの反対側に存在すること。 イ)頂角ADBは一定角度(20°程度)以上であること。 ウ)辺ABの中点からの距離が最短であること。

最初の三角形からデータ列[A,B,C]を作る。以降これを「輪」と呼ぶ。

D点が見つかれば「輪」を更新し、[A,D,B,C] とする。次の辺BCについて同様のことを行う。もし該当する点がなければ、その辺に対する点は採らない。「輪」のどの辺も該当する点がなければ、点が残っていても終了する。

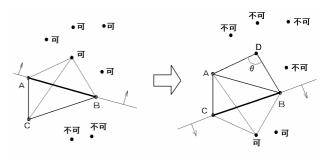


図8 輪の更新

(特例1)図9において、辺ABの最短点がCであり、 輪はACが短絡される。

(特例2)図9において、辺EFと辺FGの最短点は同じ点Jであり、輪はEFGからEJGに変更される。

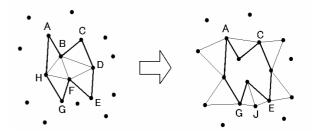


図9 輪の更新の特例

3 - 2 探査条件 (ア)「点 D は線分 A B から見て点 C の 反対側に存在すること。」の実現方法

図10のように三角形ABC平面上に点Dが存在し、線 分ABと線分CDの交点をOとおく。

点Aから点BへのベクトルをV、点Cから点DへのベクトルをWとすると、次式が成り立つ。

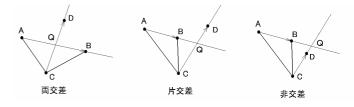


図10 線分同士の交差判定

 $Q = A + ka \cdot V$ 、 $Q = C + kc \cdot W$... 式をx yに分解すると、

 $A \times + ka \cdot V \times = C \times + kc \cdot W \times$

 $Ay + ka \cdot Vy = Cy + kc \cdot Wy$

Kaとkcでまとめると、

 $ka \cdot V \times - kc \cdot W \times = C \times - A \times ...$

 $ka \cdot Vy - kc \cdot Wy = Cy - Ay...$

式から ka と kc が求まる。

(物理的意味)

両交差の時はka、kcとも0以上1未満となる。 図10の片交差ではkcが0以上1未満となる。

つまり、点Dが線分ABから見て点Cの反対側に存在することは、kcが0以上1未満となる片交差と同義である。

3 - 3 探査条件 (イ) 「頂角 A D B は一定角度以上であること。」 の意味と方法

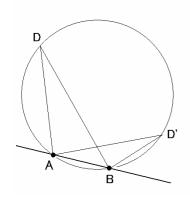


図11 頂角制限

頂角が一定以下ということは、図11の円の内部に点Dが存在することになる。空間的には、線分ABを軸に回転してできるドーナツの内部に点Dが存在することとなる。

頂角= とすると、

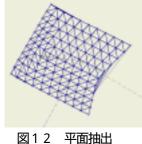
内積 (D A · D B) = | D A | · | D B | · c o s から が求まる。

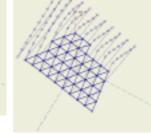
4 多面抽出法

3 で述べた自動面張りを発展させ、計測データを複数の 平面からなる多面体として抽出し、そのエッジや頂点のデータを得ることに成功した。

4-1 自動面張りを応用した平面抽出

探査条件に「新たな面は基準面と一定角度以下であること。」を追加することにより、点郡から平面部分を抽出可能である。図12の左側は立方体の角を自動面張りした例右側は同じデータに上記探査条件を付加した例である。エッジの所で面の成長が止まっていることがわかる。





4-2 複数平面の探査法1・・・逐次平面抽出法

最初の平面探査の後、輪の2点に最も近い点を、新たな「輪」の始点とする。最初の面と同様に探査を行い、平面を成長させる。以上の面探査を点がなくなるまで行うことで、複数の平面が探査可能である。

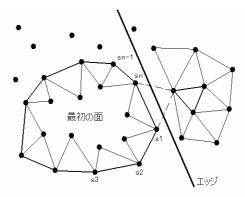


図13 次の面への移行

4-3 単一稜線の抽出

2つの平面の稜線は図14のように、平面中心c1・c2と原点を通る平面に垂直となる。

稜線の通過点 p0 をこの平面上にとれば、p0 は c 1 と c 2 を結ぶ最短点となる。

稜線の方向ベクトル Uout は以下の式から求め、正規化する。

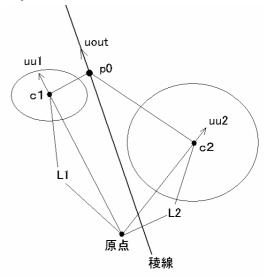


図14 平面と稜線の関係

uout • uu1=0

uout · uu2=0

uout • (1,1,1)=1

p0 は以下の式から求める。

P0 • uu1=L1

P0 • uu2=L2

P0 • **uou**t=0

4-4 複数稜線の抽出

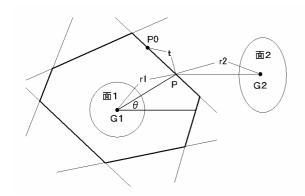


図15 平面データからの稜線抽出

図15のとおり、多面体の平面1の面重心をG1、平面2の面重心をG2とする。

平面1と他の全ての面との稜線を抽出する。すると、全て の稜線は平面1上に存在する。

次に各面重心から、その平面に沿って円の半径を伸ばしていくと、最初に出会う面が求まる。

面重心 G1から稜線上の任意の点 P(px,py)への距離を r1、稜線の通過点 P0(x0,y0)から Pへの距離を t とすると 次式が成り立つ。

Px=x0+t*ux=Gx+r1*cos

Py=y0+t*uy=Gy+r1*sin

以上の2式からr1が の関数として求まる。一方、面重 心G2と点Pとの距離r2も の関数となるので、面1と 面2はr1とr2の大きい方の値の半径で出会うことに なる。これを0°から360°まで展開すれば、面1のエ リアを求めることができる。

4-5 面境界の表現法

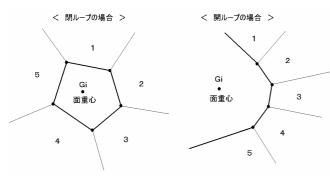


図16 面境界の形状

4 - 4で求めた複数稜線からなる面境界を表現するには、図16の左側のように3面の交点をつながり順に結べばよい。ただし、右側のように面重心からある方向に稜線が存在しない場合はエッジが閉ループにならず、

面i・1・2の交点から面2の反対方向へ無限長のエッジ が存在し、

面i・4・5の交点から面4の反対方向へ無限長のエッジが存在する。

これらの面のつながりを表現する方法として、以下のリスト表現を提案する。この表現法は現在CADで主流になっている「境界表現法」(1973年ケンブリッジ大学)とは異なる独自のものである。

開ループ [1,2,3,4,5] ・・・最初と最後は ループの先頭と末尾

閉ループ [1,2,3,4,5、1] ・・・最初と最後の項が同じになるコト

図17にこの手法で全ての境界を表現した例を示す。計 測データはサイコロの角部分。

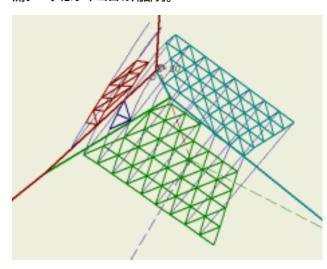


図17 多面抽出と面境界の表示

5 まとめ

本研究は製品試作の迅速・容易化を目指すものであり、 今回は3次元計測データの抽象化に取り組み、多面体としての抽象化に成功した。今後、多面体として抽出する方法 を発展させ、加工にまでつながるシステムを整備する必要 がある。

また、開発したシュミレーションソフトウェアはツール 化して整備し、その一部を参考文献のとおり公開した。 〈参考文献〉

- 1) 近藤幸治:「3次元計測1」
 http://www.vector.co.jp/vpack/filearea/win/edu/scie
 nce/engineer/index.html
- 2)福井県工業技術センターHP

http://www.vcnet.fukui.fukui.jp/~koji-kon/